國立屏東高工學習歷程

2-3雙曲線

班　　級：電機二甲

學　　號：214118

姓　　名：洪琮輔

任課教師：林玲莉 老師

目次

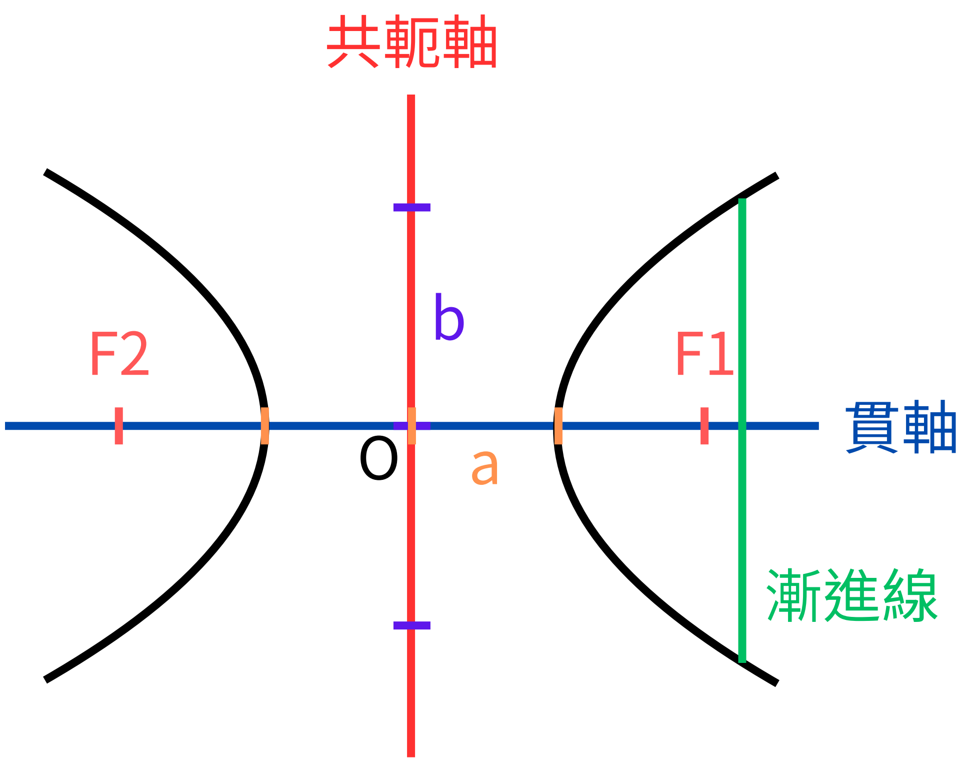
01 雙曲線重點整理

1-1 雙曲線的概念與名稱

1 定義

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a < 2c$$

2 名稱



▲圖 1-1

名稱如(圖1-1):

1. 焦點：F1、F2為焦點，長=2c
2. 中心：$\overline{F_1F_2}$ 的中點 O
3. 貫軸：長=2a
4. 共軛軸：長=2b
5. 正焦弦長：$\frac{2b^2}{a}$

3 標準式

左右：$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

上下：$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

4 一般式

左右： $Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

上下： $-Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

5 參數式

左右： $\begin{cases} x = h + a\,sec\theta \\ y = k + b\,tan\theta \end{cases}$

上下： $\begin{cases} x = h + b\,tan\theta \\ y = k + a\,sec\theta \end{cases}$

6 正交弦長

取 $y_1 = \frac{b^2}{a}$ ， $y_2 = \frac{-b^2}{a}$

長= $y_1 - y_2 = \frac{2b^2}{a}$

7 漸近線

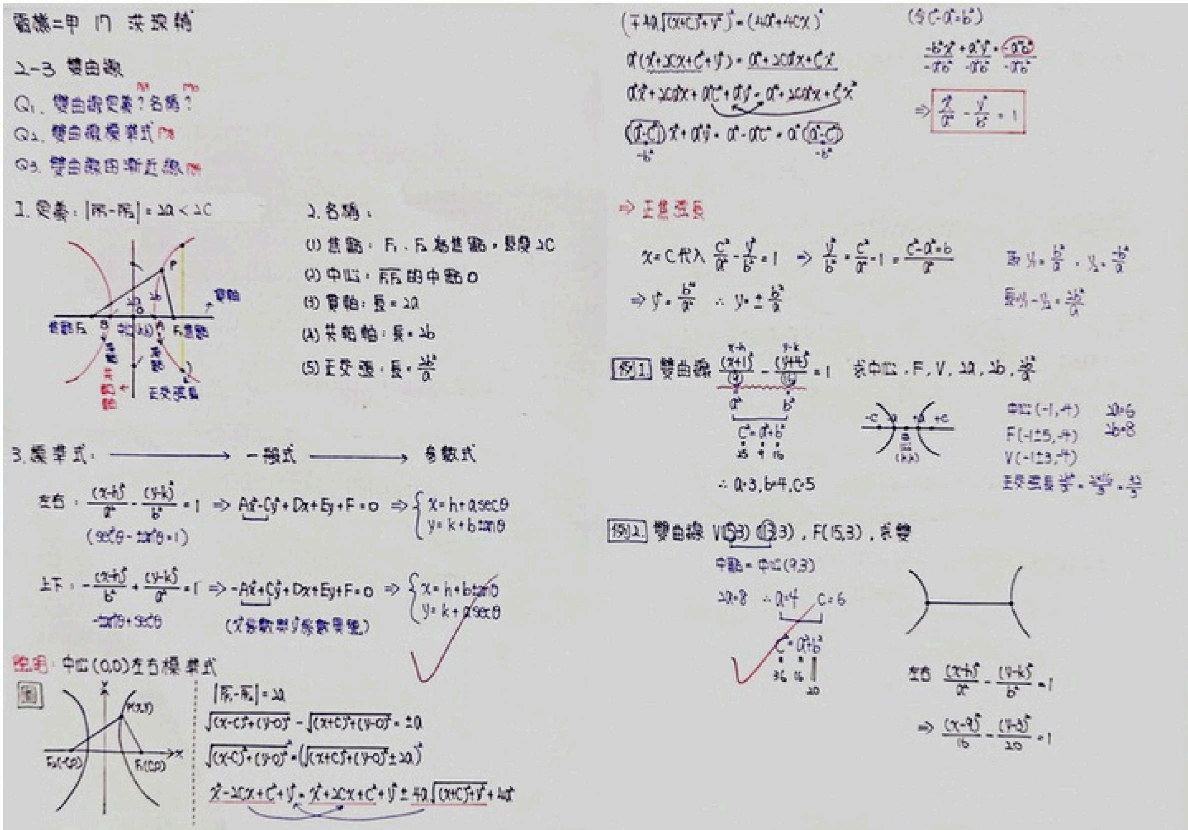
1. 找法：雙=0 ⇒ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow A \pm B=0$
2. 漸近線焦點為中心
3. 雙曲線上的任一點到兩漸近線距離成積為定值

8 特殊雙曲線

1. 等軸雙曲線 ⇒ 貫軸長 = 共軛軸長
   (a=b) (兩漸近線互相垂直)

2. 共軛雙曲線 ⇒ $a \xleftrightarrow{\text{互換}} b$

   ⇒ $雙=1 \xleftrightarrow{\text{共軛}} 雙=-1$
   (兩漸近線相同)



2-3 雙曲線

Q1. 雙曲線定義？名稱？

Q2. 雙曲線標準式

Q3. 雙曲線的漸近線

1. 定義：$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a<2c$

2. 名稱：

(1) 焦點：F_1、F_2 為焦點，距離 $2c$

(2) 中心：$\overline{F_1F_2}$ 的中點 O

(3) 貫軸：長 $=2a$

(4) 共軛軸：長 $=2b$

(5) 正焦弦：長 $=\frac{2b^2}{a}$

3. 標準式 ⟶ 一般式 ⟶ 參數式

左右：$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow \begin{cases} x=h+a\sec\theta \\ y=k+b\tan\theta \end{cases}$

上下：$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \Rightarrow -Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow \begin{cases} x=h+b\tan\theta \\ y=k+a\sec\theta \end{cases}$

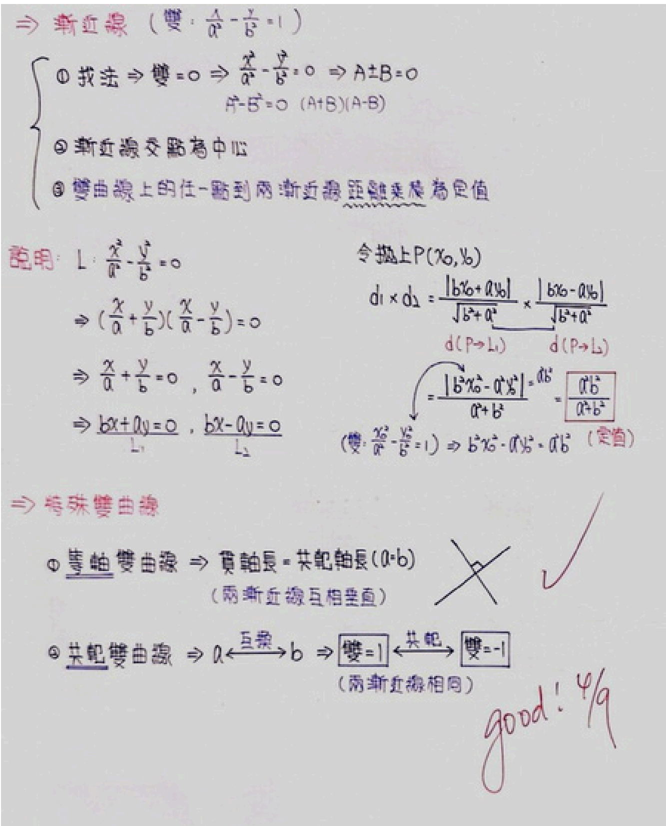
⇒ 正焦弦長

例1. 雙曲線 ……，求中心、F、V、2a、2b、$\frac{2b^2}{a}$

$\therefore a=3,\ b=4,\ c=5$

例2. 雙曲線 ……，F(15,3)，求雙曲線

左右 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



⇒ 漸近線（雙：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$）

① 找法 ⇒ 雙 $=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow A\pm B=0$

$A^2-B^2=0 \quad (A+B)(A-B)$

② 漸近線交點為中心

③ 雙曲線上的任一點到兩漸近線距離乘積為定值

說明：$L:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$\Rightarrow (\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=0$

$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

$\Rightarrow \underset{L_1}{\underline{bx+ay=0}},\ \underset{L_2}{\underline{bx-ay=0}}$

令雙曲線上 $P(x_0,y_0)$

$d_1\times d_2=\underbrace{\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}}_{d(P\to L_1)}\times\underbrace{\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{b^2+a^2}}}_{d(P\to L_2)}$

$=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{a^2+b^2}=\boxed{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

（雙：$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$）$\Rightarrow b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$（定值）

⇒ 特殊雙曲線

① 等軸雙曲線 ⇒ 貫軸長 = 共軛軸長 $(a=b)$

（兩漸近線互相垂直）

② 共軛雙曲線 ⇒ $a \xleftrightarrow{\text{互換}} b \Rightarrow \boxed{雙=1} \xleftrightarrow{\text{共軛}} \boxed{雙=-1}$

（兩漸近線相同）

good! 4/9

02 雙曲線例題

2-1 習作例題

1 習作:由點求出軌跡方程式

3. 試求到兩定點(4, 0)、(−4, 0)之距離差為 2 的所有點所形成的軌跡方程式。

解 $c=4$ $2a=2$, $a=1$ $b^2=c^2-a^2=16-1=15$

$\therefore$ 方程式: $x^2-\frac{y^2}{15}=1$

2 習作:由已知條件求軌跡方程式

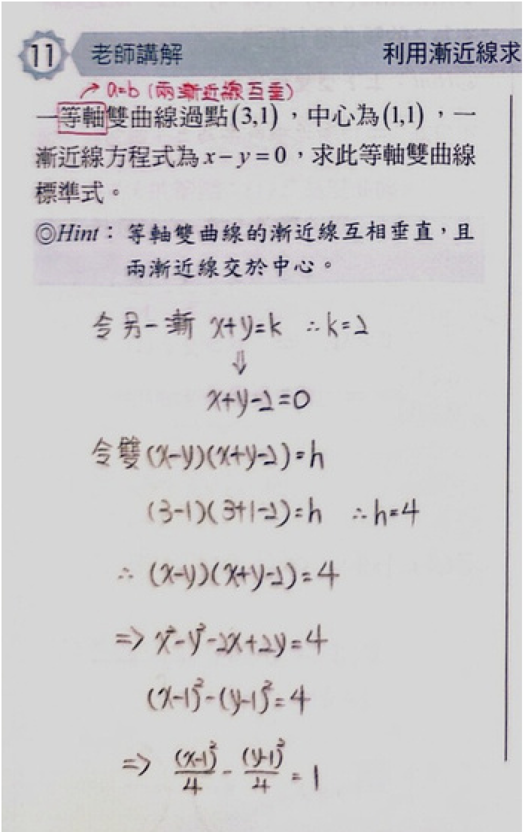
4. 試求中心在原點，一焦點為(0, 13)，一頂點為(0, −12)的雙曲線方程式。

解 中心(0,0) $c=13$, $a=12$ $b^2=c^2-a^2=169-144=25$, $b=5$

$\therefore$ 方程式: $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

2-2 講義例題

1 講義:利用漸近線求等軸雙曲線



11 老師講解　利用漸近線求

$a=b$ (兩漸近線互垂)

一 $\boxed{\text{等軸}}$ 雙曲線過點 $(3,1)$，中心為 $(1,1)$，一漸近線方程式為 $x-y=0$，求此等軸雙曲線標準式。

◎*Hint*：等軸雙曲線的漸近線互相垂直，且兩漸近線交於中心。

令另一漸 $x+y=k$ $\therefore k=2$

$\Downarrow$

$x+y-2=0$

令雙 $(x-y)(x+y-2)=h$

$(3-1)(3+1-2)=h$ $\therefore h=4$

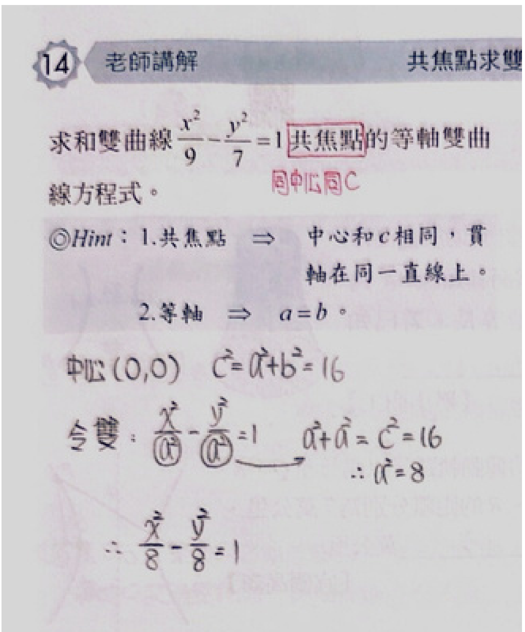
$\therefore (x-y)(x+y-2)=4$

$\Rightarrow x^2-y^2-2x+2y=4$

$(x-1)^2-(y-1)^2=4$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

2 講義:共焦點求雙曲線方程式



14 老師講解　共焦點求雙

求和雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ $\boxed{\text{共焦點}}$ 的等軸雙曲線方程式。

同中心同C

◎*Hint*：1.共焦點 ⇒ 中心和 c 相同，貫軸在同一直線上。

2.等軸 ⇒ $a=b$。

中心 $(0,0)$ $c^2=a^2+b^2=16$

令雙：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ $a^2+a^2=c^2=16$ $\therefore a^2=8$

$\therefore \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

2-3 考卷例題

1 考卷:由焦點、定義求方程式

(B) 3. 設坐標平面有兩定點 $A(5,0)$、$B(-5,0)$，若 $P(x,y)$ 滿足 $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|=8$，則所有 P 點所形成的圖形方程式為 (A) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ (B) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (C) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ (D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$。 【課本例題3】

F

$2a=8$, $a=4$, $c=5$

$b^2=c^2-a^2=25-16=9$　∴方程式 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2 考卷:由焦點、定義求方程式

6. 試求雙曲線 $x^2-4y^2=9$ 的正焦弦長為 $\frac{3}{2}$ 。 【課本例題2】

$\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{9}=\frac{9}{9}$

$a=3$　$b=3$

$\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{3}=6$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$

$a=3$

$\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{9}{4}}{3}=\frac{3}{2}$

03 問題困難與解決

3-1 問題、困難解決過程

1 遇到困難

　　這個章節我遇到的困難是考卷第 6 題那種題型。一般的雙曲線標準式我會計算，但遇到分子有數字的情況就不太會了，因為我沒有直覺想到要移項，把分子上的 4 移到底下。再加上我把題目想得太簡單，以為分子有數字也沒差，就直接開始算，結果當然算錯了。

2 問題解決

　　這題我是在公布答案、檢討考卷的時候才真正了解的。雖然寫的時候就已經對答案沒什麼信心，但我還是抱著一點希望，結果果然錯了。不過錯了也沒關係，重點是有沒有學懂。所以在老師講解的時候我很認真聽，才發現原來這題只要簡單移項一下就能解出來，其實一點也不難。

04 省思與心得

4-1 省思、心得

1 省思

　　這次的錯誤讓我發現自己在解題時有時候會太過自信，沒有仔細觀察題目的變化。尤其是對分子有數字的雙曲線式，我沒有意識到要多想一步，就直接套公式下去算，結果自然錯了。其實只要冷靜一點，停下來重新整理題目，就能發現其實只是小變形而已。

2 心得

　　經過這次考卷檢討，我學到了不能忽略題目的細節，也不能因為題目看起來很熟悉就掉以輕心。老師講解的時候我很專心聽，才知道原來只要簡單一項就能解出來，並不困難。以後我會更注意題目的形式，學會多觀察、多思考，才不會再重蹈覆轍。