國立屏東高工學習歷程檔案

數學科

3-1極限的概念

113學年度下學期

班級:電機二甲
學號:214126
姓名:陳詠翔
任課老師:林玲莉 老師

目錄

研究動機

一開始接觸函數極限時，那種「無限靠近」卻又「永不相交」的狀態曾讓我感到不解。然而隨著學習的深入，我逐漸發現數學中常見「無窮小」與「無限接近」的現象，當一個量不斷變小，或一個點持續靠近，的其間卻總存在著微小的差距。
這種對精確描述「最後的狀態」的好奇，以及理解極限在數學思想中的重要性，驅使我深入研究函數極限。

函數極限定義

1 定義

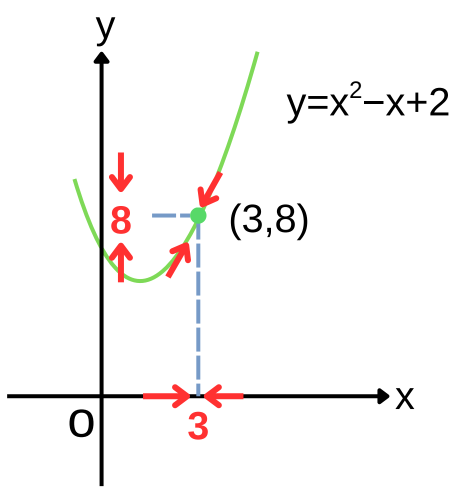
當 x 的值無限靠近某個特定的數 a（但 x 可以不等於 a）時，如果函數 f(x) 的值也無限靠近某個特定的數 L，那麼我們就說，當 x 趨近於 a 時，f(x) 的極限是 L。

符號表示：$\lim\limits_{x \to a} f(x)=L$

2 函數的極限

透過 $f(x)=x^2-x+2$ 在 x=3 附近的數值變化，描述「趨近」的概念

x→3− (從較小的值)	2	2.5	2.9	2.99	2.999	…
f(x) 的值	4	5.75	6.91	7.0701	7.088001	…→8
x→3+ (從較大的值)	…	3.1	3.01	3.001	3.5	4
f(x) 的值	…→8	7.91	7.3301	7.293001	10.75	14



函數極限定義

3 趨近但不等於

討論極限時，主要關注的是 x 在 a 附近的行爲，而不是 x 等於 a 時的情況。即使 f(a) 沒有定義，或者 f(a) 的值和 L 不同，極限仍然可能存在。

4 左右極限

要讓 lim x→a f (x) = L 成立，不論 x 是從比 a 小的方向靠近[左極限 lim x →a^- f (x)]，還是從比 a 大的方向靠近[右極限 lim x →a^+f (x)]，函數值都必須趨近於同一個值 L。如果左右極限不相等，則函數在 x= a 的極限不存在。

函數極限定義

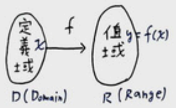
重點整理筆記

電機二甲 25號 陳詠翔

C3 微分

3-1 極限的概念

1. 函數



⇒ 定義域存在
- ① 分母 $\neq 0$
- ② 根內 ≥ 0
- ③ $\log_a x$ (真 >0) (底 $>0, \neq 1$)

⇒ D & R 集合寫法

例 $D = \{x = 1, 2, \cdots 100\}$ (列舉法)

$= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$ (描述法)

為自然數

⇒ 合成函數

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

例, $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2-2$

$g \circ f(x) = g(x+1)$

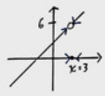
$= (x+1)^2 - 2$

$= x^2 + 2x - 1$

2. 函數極限

① 極限的概念

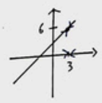
$f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$



$\lim\limits_{x\to3} f(x) = 6$ 存在 ⇒ 不連續

$(\lim\limits_{x\to3} f(x) = 6 = \lim\limits_{x\to3} f(x))$

$f(x) = x+3$



$\lim\limits_{x\to3} f(x) = 6$ 存在 ⇒ 連續

⇒ 極限存在定義

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

⇓

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

② 找極限

直接代入	$\frac{0}{0}$ 型	$\sqrt{\ }$ 型	夾擠型
$\lim\limits_{x\to2}(2x+3)$ $=7$	⇓ 約去公因式 $(x-1)(x-2)$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\boxed{x^2-3x+2}}{x-1}$ $= \lim\limits_{x\to1}(x+2) = -1$	⇓ 去根型 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\boxed{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $= x-1$ $= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$	⇓ 夾擠定理 $g(x) \leq \boxed{f(x)} \leq h(x)$ ↓ ↓ ↓ α α α $3x+2 \leq f(x) \leq 2x+3$ $\lim\limits_{x\to1}(3x+2) = 5$ $\lim\limits_{x\to1}(2x+3) = 5$ $\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x) = 5$

③ 極限運算

(加減乘除可拆)

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = [\lim\limits_{x\to a} f(x)] \times [\lim\limits_{x\to a} g(x)]$

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

3. 函數的連續

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = f(a)$

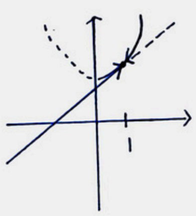
⇓

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

⇒ 極限與連續的關係

極限存在 $\underset{\text{必定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}$ 連續

例 $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases}$ $x=1$ 連續



$\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+1) = f(1) = \lim\limits_{x\to1^-}(x+a)$

$\quad\ \ \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

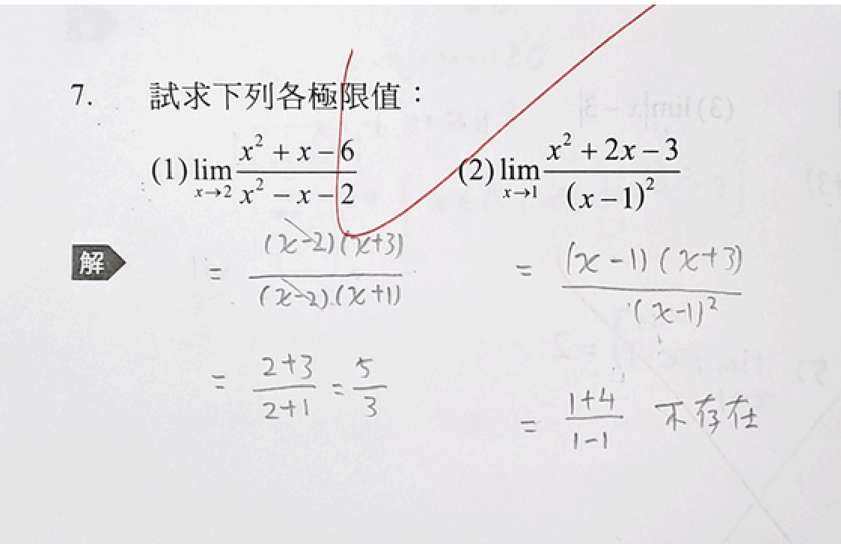
$\quad\ \ 2 \quad = \quad 2 \quad = \quad 1+a$

$\therefore a = 1$

good! 4/15

函數例題

1 習作例題



7. 試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

解

$=\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}$

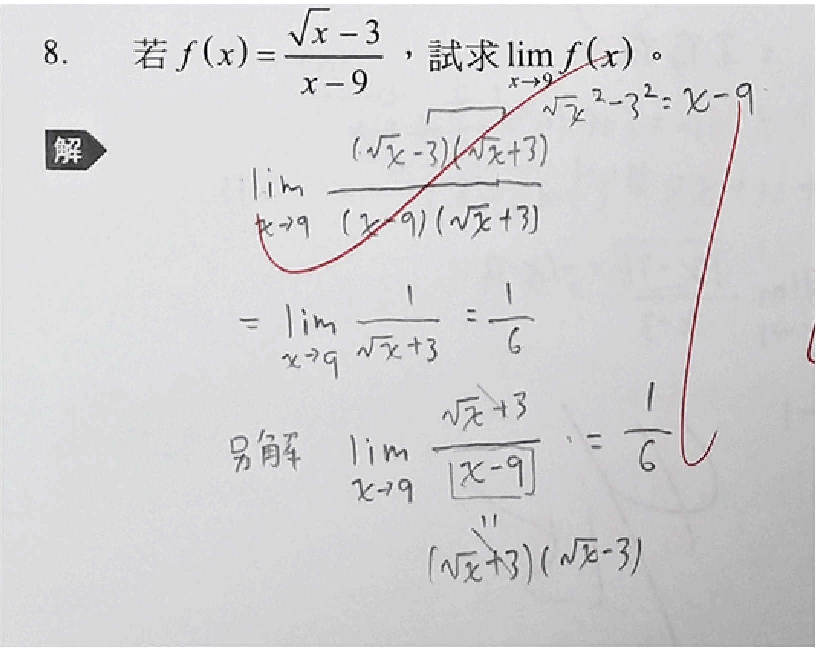
$=\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$

$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2}$

$=\frac{1+4}{1-1}$ 不存在

說明:
(1) 將分子和分母做分解，消去 (x−2) 項，代入 x=2，即可求得極限值。

(2) 將分子做分解，化簡後分母會為0，但分子不為零，故極限不存在。



8. 若 $f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$，試求 $\lim\limits_{x\to9}f(x)$。

$\sqrt{x}^2-3^2=x-9$

解 $\lim\limits_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$

另解 $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}+3}{\boxed{x-9}}=\frac{1}{6}$

$\boxed{x-9}=(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)$

說明:
當 x=9 時分子分母皆為零，屬於不定型，分子分母同乘 x +3 化簡，求出極限值。

函數例題

2 課本例題

類題

4. 已知函數 $f(x)=3x$，$g(x)=x^2+5$，試求下列各合成函數：

(1) $g(f(x))$

$=g(3x)$

$=(3x)^2+5$

$=9x^2+5$

(2) $f(g(x))$

$=f(x^2+5)$

$=3(x^2+5)$

$=3x^2+15$

說明:

合成函數的運算

類題

12. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}3x+5\text{，當 }x\ge -1\\ x^2-a\text{，當 }x<-1\end{cases}$ 為連續函數，試求實數 a 之值。

$f(-1)=-3+5=2$

$\lim\limits_{x\to -1} 3x+5=2$

$\parallel$

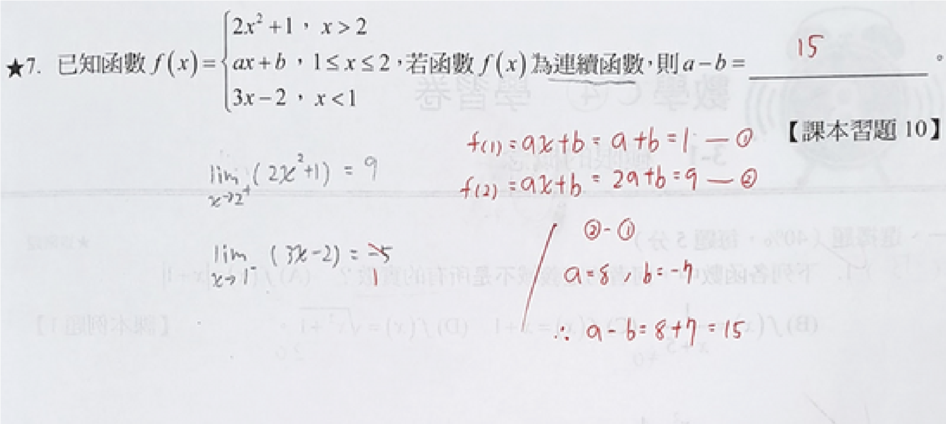
$\lim\limits_{x\to -1} x^2-a=2$ $\therefore a=-1$

說明:

函數在 x=−1時連續，代表左右極限相等且等於函數值，計算 x = −1 的左右極限，即可解出 a 值。

函數例題

3 考卷例題



★7. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+1，x>2 \\ ax+b，1\le x\le 2 \\ 3x-2，x<1 \end{cases}$，若函數 $f(x)$ 為連續函數，則 $a-b=$ 15 。

【課本習題 10】

$\lim_{x\to 2^+}(2x^2+1)=9$

$\lim_{x\to 1^-}(3x-2)=\cancel{5}\ 1$

$f(1)=ax+b=a+b=1$ —①

$f(2)=ax+b=2a+b=9$ —②

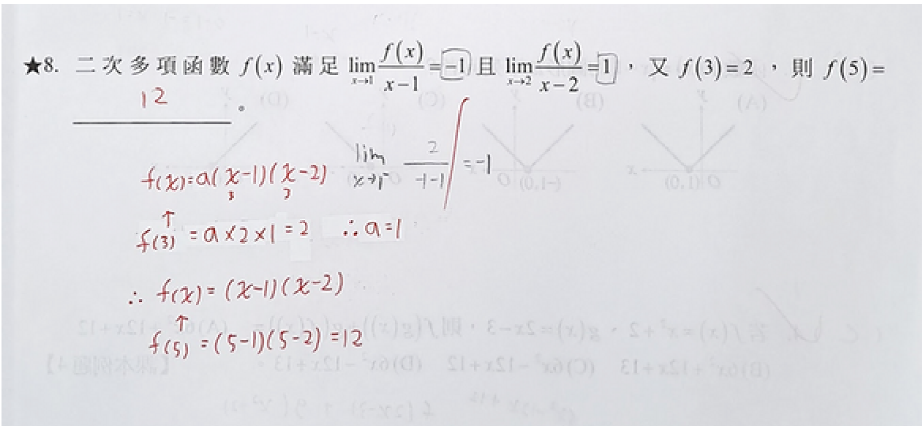
②-①

$a=8，b=-7$

$\therefore a-b=8+7=15$

說明:

利用兩個極限條件判斷 f(x) 含有 (x+1) 和 (x−2) 多項式因式，再由 f(3)=2 求出係數，即可求出 f(5)。



★8. 二次多項函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\boxed{-1}$ 且 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\boxed{1}$，又 $f(3)=2$，則 $f(5)=$ 12 。

$f(x)=a(x-1)(x-2)$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{-1-1}=-1$

$f(3)=a\times 2\times 1=2 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)$

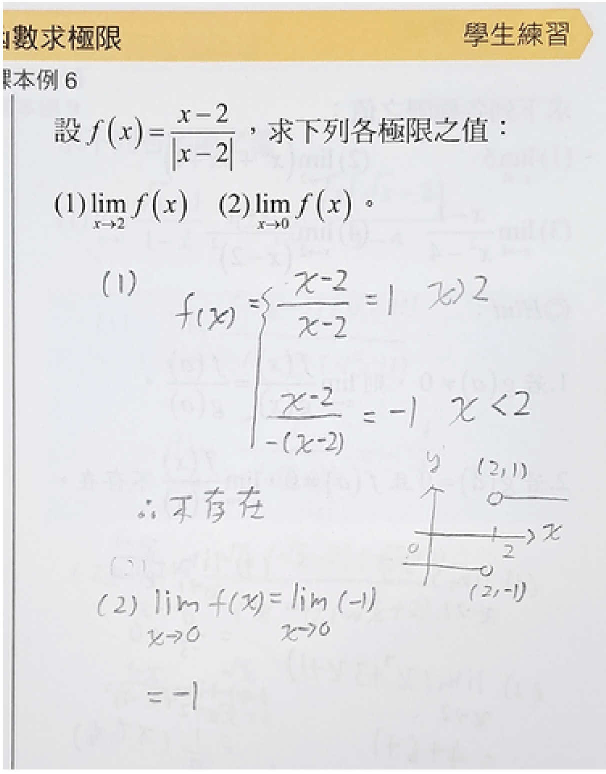
$f(5)=(5-1)(5-2)=12$

說明:

函數在 x = 1 和 x = 2 時連續，因此左右極限相等，在列出關於 a 和 b 的方程式，解聯立求得 a值與b值。

函數例題

3 講義例題



數求極限 學生練習

本例 6

設 $f(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$，求下列各極限之值：

(1) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (2) $\lim_{x\to 0} f(x)$。

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x-2}=1 & x>2\\ \frac{x-2}{-(x-2)}=-1 & x<2\end{cases}$

∴不存在

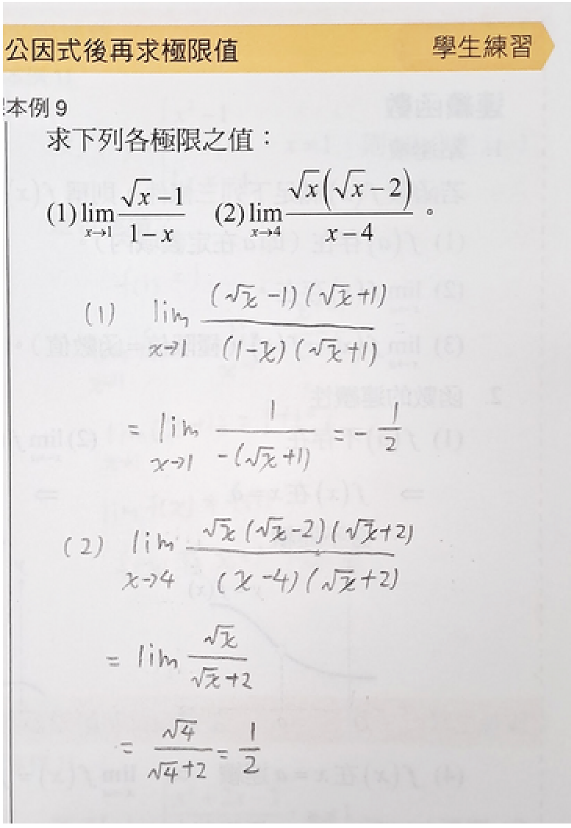
(2) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(-1)$

$=-1$

說明:

(1) 在 x=2 處，左右極限不相等(分別為 1 和 −1)，因此極限值不存在。

(2) 在 x=0 處，x<2，所以 f(x)=−1，極限值等於 −1。



公因式後再求極限值 學生練習

本例 9

求下列各極限之值：

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$ (2) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4}$。

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-(\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

$=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}$

說明:

(1)將分子和分母同乘 根號 x + 1 並化簡，消去 (1−x) 的多項式因式，在代入 x=1，即可求得極限值。

(2)將分子和分母同乘 根號 x + 2 並化簡，消去 (x−4) 的多項式因式，在代入 x=4 ，即可求得極限值。

問題與解決

1 問題

剛開始學極限的時候，我常常卡在一個點，就是不知道什麼時候該看 x 從左邊靠近，什麼時候該看從右邊靠近，有時候題目寫 $x \to a$，我就會搞混，想說到底是要看比 a 小一點點的 x，還是比 a 大一點點的 x？
此外有時候函數在那個點根本不存在，或者左邊右邊靠近的值不一樣，就更讓我頭痛，不知道到底哪個才算數，寫題目就常常卡住，不知道該怎麼辦。

2 解決

之前搞不懂趨近的方向，後來我就特別認真看老師上課講義裡的例題，老師一步一步帶我們看，當 x 從左邊和右邊慢慢靠近那個數字的時候，函數的值是怎麼變的，我才慢慢懂，原來左極限跟右極限就是在看從不同邊靠近的時候，函數最後會跑到哪裡，即使那個點函數根本沒值，極限還是可以告訴我們函數在那附近是怎樣的。

省思與心得

1 省思

學習極限的過程中，我發現不能只有單純的只有去記得公式，不然當遇到題目時，會不知道要如何去解題，所以要先理解定義，以及描述的名詞，就算感覺定義與名詞相當的難理解，也需要多練習將不懂的給學懂，因爲那是判斷極限存在與否的基底，沒有理解它的話，就算寫在多的題目，也很容易就會寫錯。

2 心得

學了極限之後，我體會到它不僅是微積分的起點，更是一種不同於以往所學的，儘管剛開始學時，我常常卡在趨近方向的判斷，不明白 $x\to a$ 該看左邊還是右邊，但經由老師的講解，以及大量的練習，讓我逐漸學會如何判斷。