國立屏東高工電機科
學習歷程檔案

極限的概念

班　　級：電機二甲
學　　號：214123
姓　　名：陳泓熹
教　　師：林玲莉老師

目錄

● 探究動機

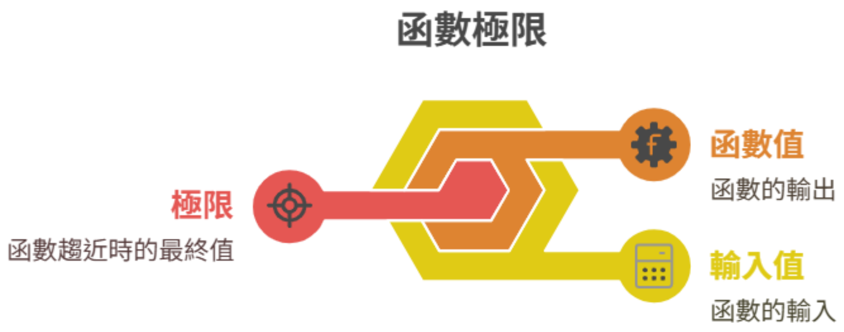
第一次接觸微積分的極限概念時，我對無窮和極限的思想感到既困惑又無助。無窮大似乎是無法實際達到的，但極限的概念卻讓我明白，函數可以在接近無窮的過程中，趨近某一確定的數值。這種「趨近」改變了我對數學的理解。

這種奇妙且抽象的概念，不僅讓我對微積分有了更深的認識，也激發了我對數學更深層次探索的興趣。

●概念與定義

1. **概念：**

簡單來說，當 x 趨近某個數字或無窮大時，函數的值可以趨近一個確定的數字，這個數字被稱為極限。



2. **嚴格定義（$\varepsilon-\delta$定義）：**

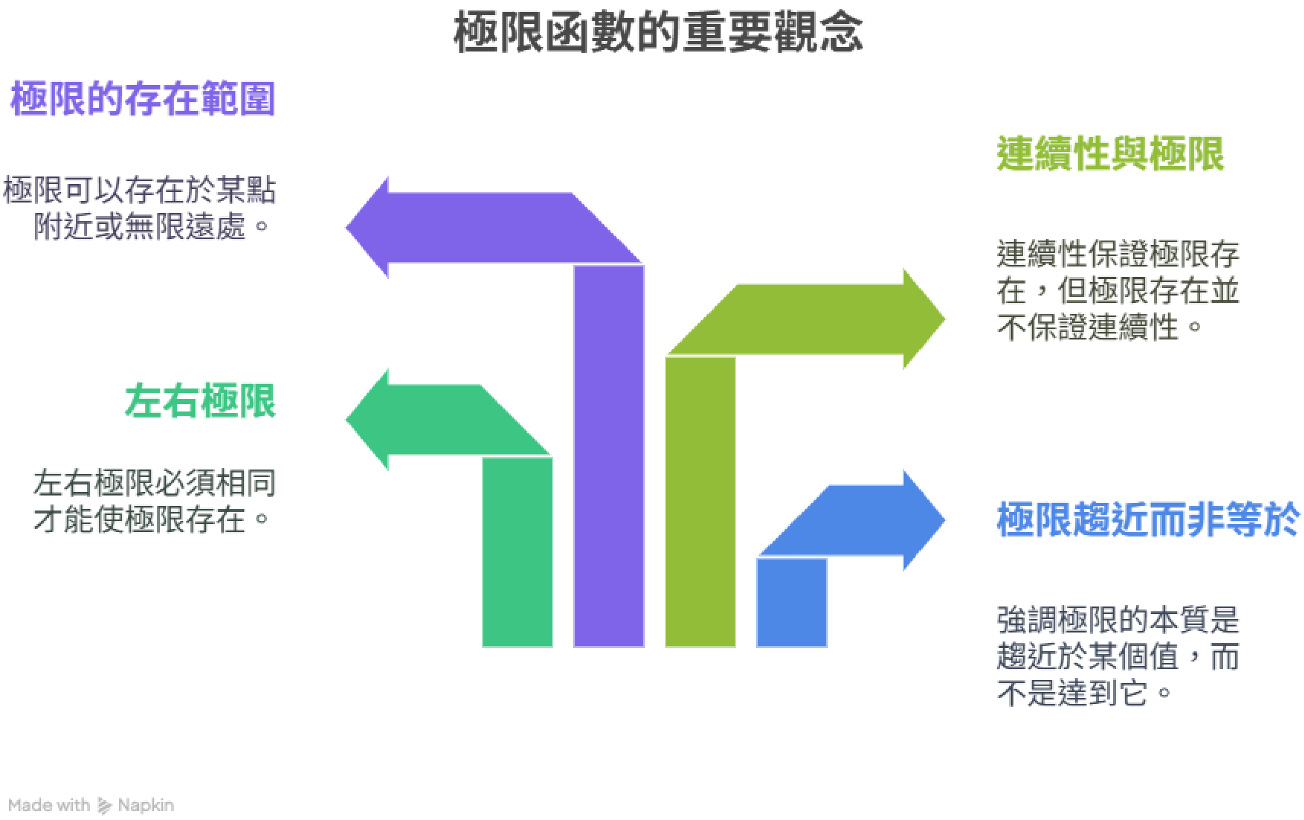
設$f(x)$是定義在某區域內的函數，並且a是這個區域中的某一點。若對每個$\epsilon>0$，都存在一個$\delta>0$，使得當$0<|x-a|<\delta$，$|f(x)-L|<\epsilon$，則稱$f(x)$在$x\to a$時的極限為L。

✓ 註解

- ϵ代表函數值$f(x)$和極限L之間的誤差範圍。
- δ代表自變數x和點a之間的距離範圍，當這個範圍內的所有x都使得$f(x)$接近L時，極限就成立。

● 觀念

- 極限重視的是「趨近」而非「等於」。
- 左右極限相同才表示極限存在。
- 函數有極限不一定連續，但連續一定有極限。
- 極限可以存在於某點附近，也可以在無限遠處。



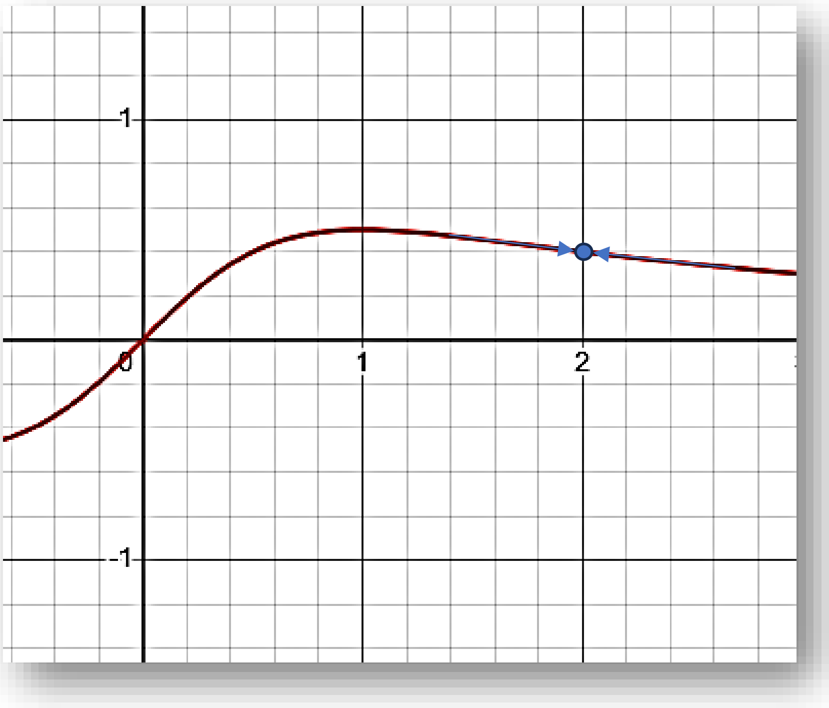
● 函數極限

1. 極限存在且連續

對應規則為 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$函數x趨近於2時，是有定義的。

(1.899)	$f(1.999)$	$f(2)$	$f(2.001)$	(2.01)
0.4012	0.4001	→0.4←	0.3998	0.3988

- 當x趨近於 2 時函數值趨近於 0.4，我們會稱此函數帶 2 的極限值為 0.4，正好就是$f(x)$，這種情況我們稱為在$x = 2$「連續」。

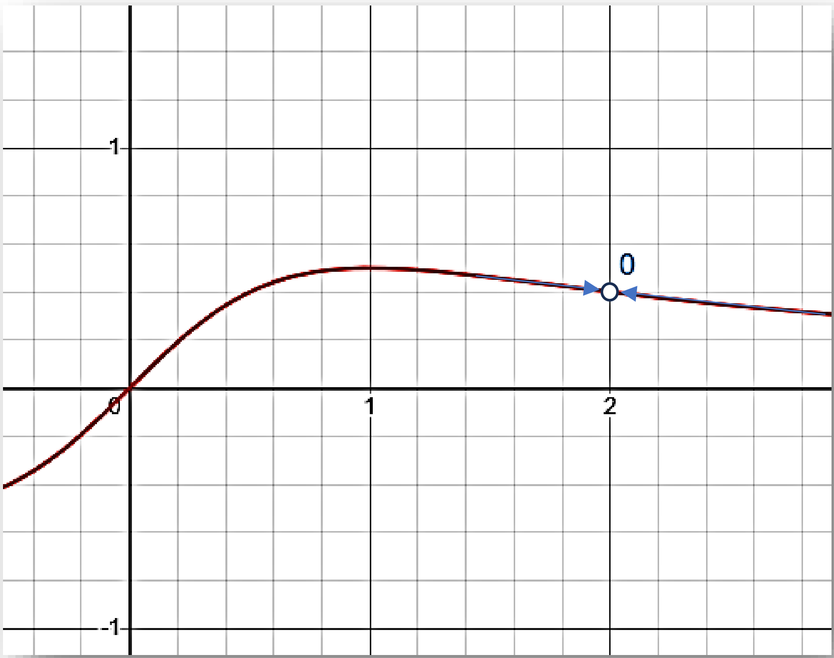


2. 極限存在但不連續

延續上述的公式，雖然存在極限，但有時趨近的「極限」不會是那個函數值。

■ $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2+1}, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$

● 當$x\to 2$時，$g(x)$的極限與前面的$f(x)$相同都是0.4。但是$g(2)\neq 0.4$，這就是說，$g(2)$在$x=2$不連續。

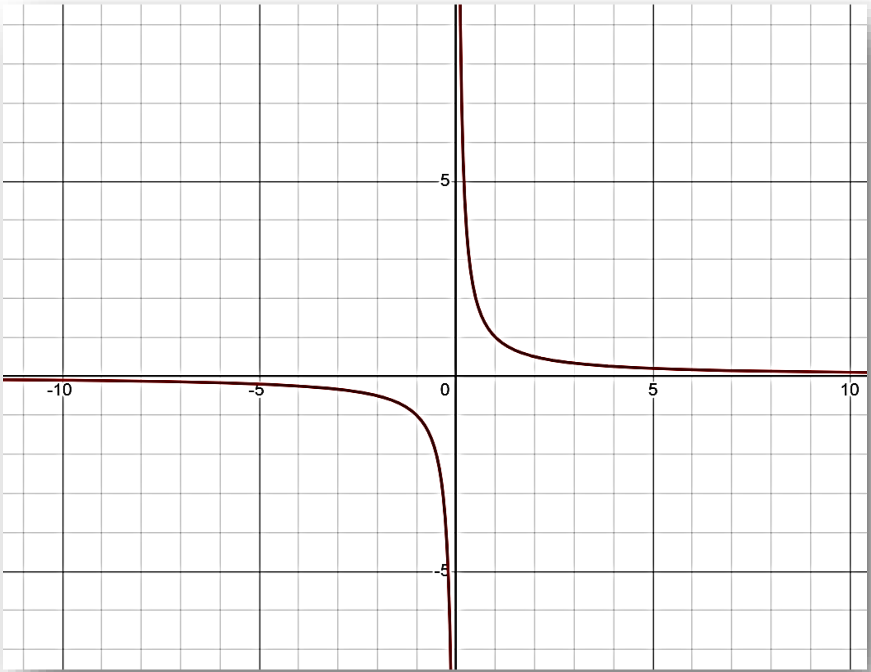


3. 極限不存在

「極限不存在」的概念是指當變數趨近某一個特定值時，函數的輸出值無法穩定接近某一個確定的數字，也就是左極限不等於又極限。

- $y = \frac{1}{x}$

- 這個函數在$x = 0$也沒有定義，圖形會在$x = 0$處有垂直漸近線，兩邊的值一邊衝向正無限大，一邊衝向負無限大，所以極限不存在。



4. 有限處與無限處

※有限處：

- 指的是$x \to a$，趨近於一個「固定的數字」。
- 看得是x愈來越趨近這個數字，$f(x)$的行為。
- 可以趨近一個實數也可以無限大或發散。

例子：

- $\lim_{x \to 3}(2x+1) = 7$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

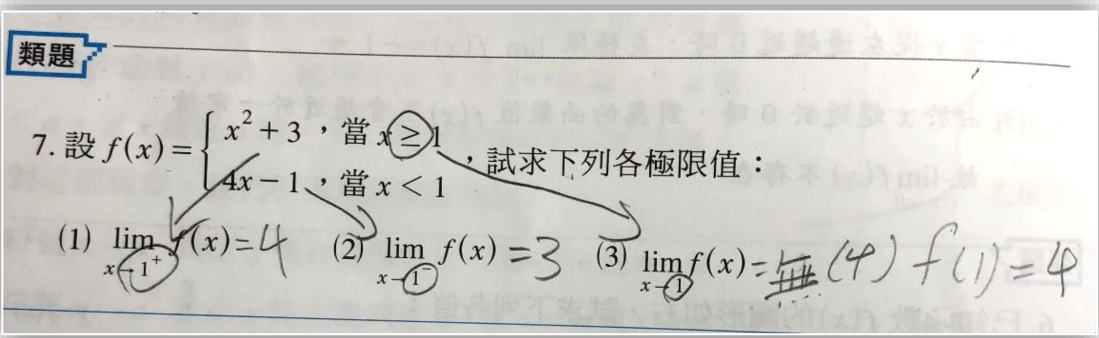
※無限處：

- 指的是$x \to \infty$或$x \to -\infty$。
- 看得是x愈來越大或越來越小這個數字，$f(x)$的行為。
- 可以趨近一個實數也可以無限大或根本沒有極限。

例子：

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty^-} x^3 = -\infty$

■ 課本例題

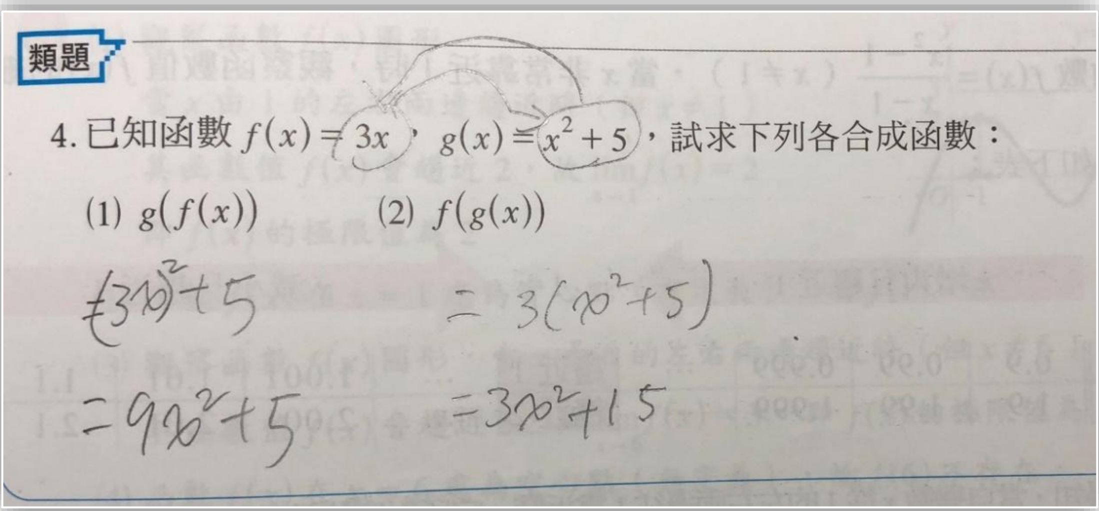


類題

7. 設 $f(x)=\begin{cases} x^2+3，當 x \ge 1 \\ 4x-1，當 x<1 \end{cases}$，試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$ (2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ (3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ 無 (4) $f(1)=4$

- 判斷x趨近的方向，找尋符合函數的式子，決定帶入的函數便可求出答案。



類題

4. 已知函數 $f(x)=3x$，$g(x)=x^2+5$，試求下列各合成函數：

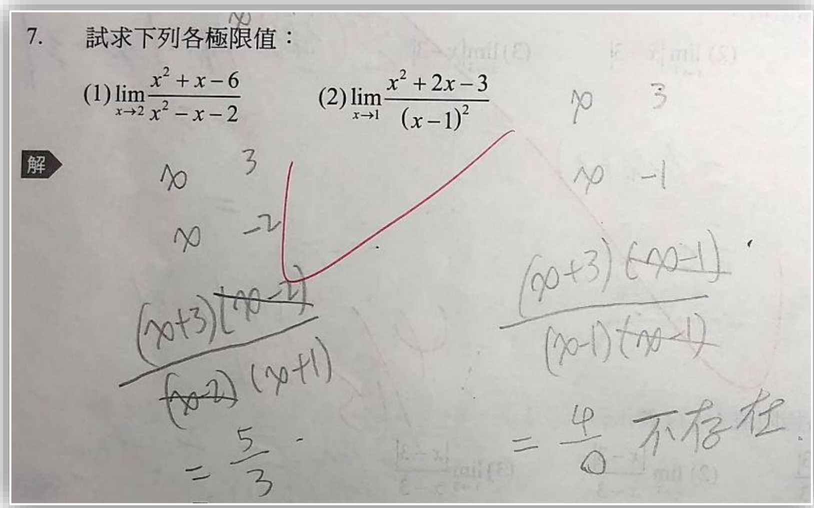
(1) $g(f(x))$ (2) $f(g(x))$

$=(3x)^2+5$ $=3(x^2+5)$

$=9x^2+5$ $=3x^2+15$

- 將函數的式子帶入另一個函數整理後便可求出答案。

■ 習作例題


7. 試求下列各極限值：

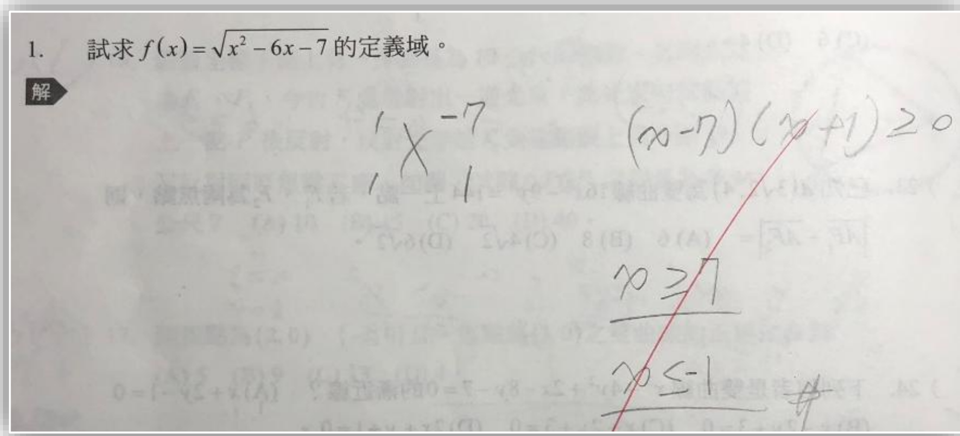
(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

解

$\dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \dfrac{5}{3}$

$\dfrac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x-1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{4}{0}$ 不存在

- 帶入為$\frac{0}{0}$無意義，這時透過因式分解上下分子分母互相消除，簡化後式子，這時代入數字便可求出答案。


1. 試求 $f(x)=\sqrt{x^2-6x-7}$ 的定義域。

解

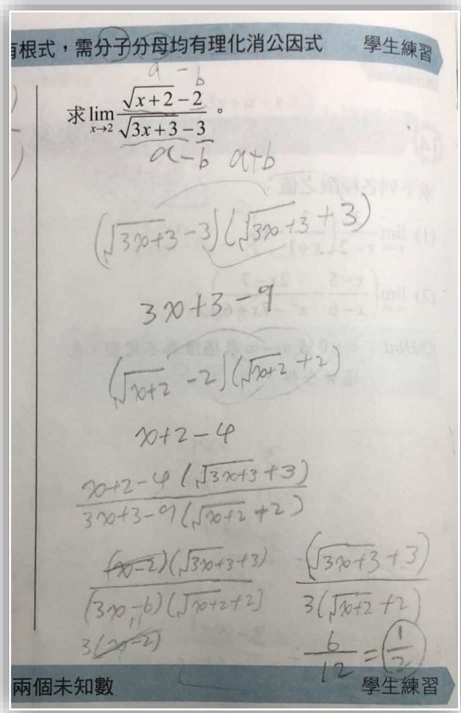
$(x-7)(x+1)\geq 0$

$x\geq 7$

$x\leq -1$ #

- 透過根號不能為零的定義，利用因式分解找出x的範圍。

■ 講義例題



根式，需分子分母均有理化消公因式　學生練習

求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$。

$(\sqrt{3x+3}-3)(\sqrt{3x+3}+3)$

$3x+3-9$

$(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)$

$x+2-4$

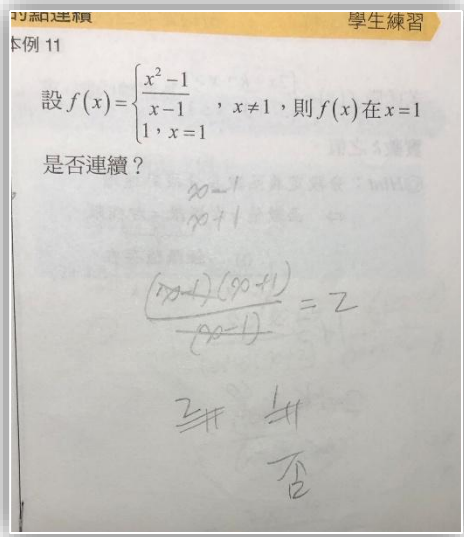
$\frac{x+2-4(\sqrt{3x+3}+3)}{3x+3-9(\sqrt{x+2}+2)}$

$\frac{(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}{(3x-6)(\sqrt{x+2}+2)}$　$\frac{\sqrt{3x+3}+3}{3(\sqrt{x+2}+2)}$

$3(x-2)$　$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

兩個未知數　學生練習

利用與原本符號相反的式子相乘，消除部分根號上下消除分子分母簡化式子後，代入趨近的值變可求出答案。



學生練習

例 11

設 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq1\\ 1, & x=1\end{cases}$，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 是否連續？

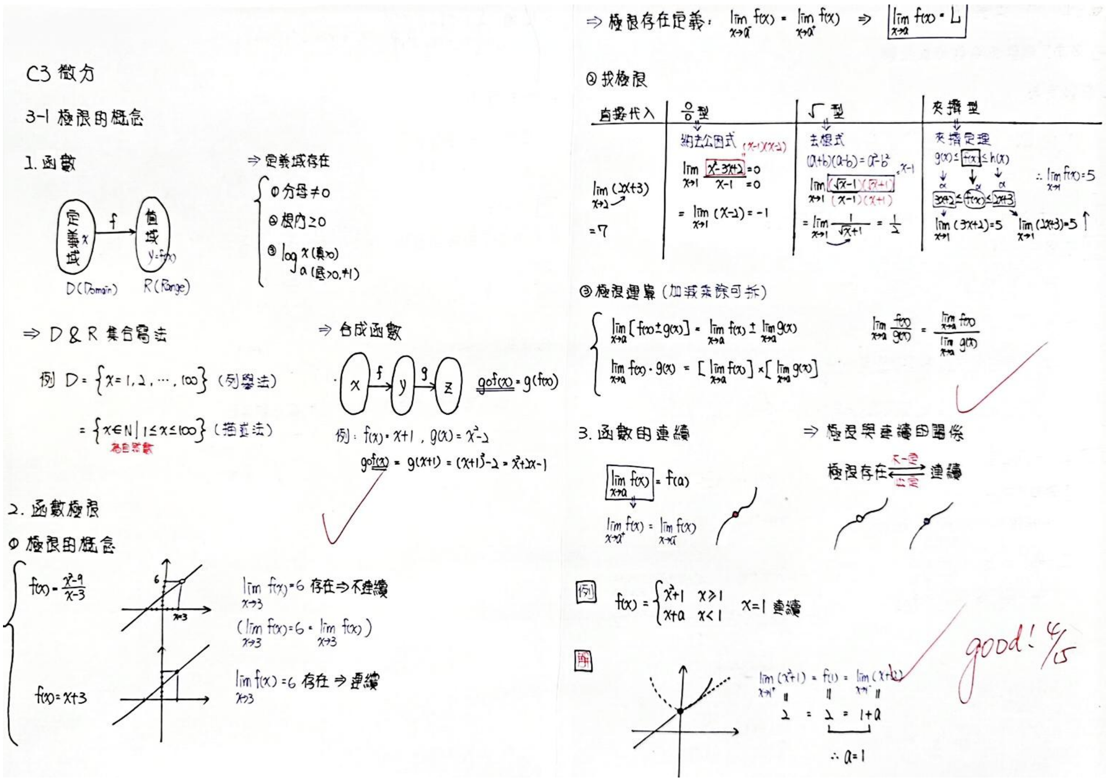
$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=2$

$2\neq1$

否

先利用因式分解將趨近值各個別代入各函數，代入是否相同即可求出答案。

■ 重點筆記



C3 微分

3-1 極限的概念

1. 函數

定義域 $x \xrightarrow{f}$ 值域 $y=f(x)$

D (Domain)　R (Range)

⇒ 定義域存在

$\begin{cases} ① \text{分母} \neq 0 \\ ② \text{根內} \geq 0 \\ ③ \log_a x \ (\text{真}>0)\ (a\text{:底}>0, \neq 1) \end{cases}$

⇒ D & R 集合寫法

例 $D = \{x = 1, 2, \cdots, 100\}$ (列舉法)

$= \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 100\}$ (描述法)

N 為自然數

⇒ 合成函數

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$　$g \circ f(x) = g(f(x))$

例：$f(x) = x+1$，$g(x) = x^2-2$

$g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)^2 - 2 = x^2+2x-1$

2. 函數極限

① 極限的概念

$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ 存在 ⇒ 不連續

$(\lim_{x \to 3} f(x) = 6 = \lim_{x \to 3} f(x))$

$f(x) = x+3$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ 存在 ⇒ 連續

⇒ 極限存在定義：$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ ⇒ $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$

② 找極限

直接代入	$\frac{0}{0}$ 型	$\sqrt{\ }$ 型	夾擠型
$\lim_{x \to 2} (2x+3)$ $=7$	約去公因式 $\lim_{x \to 1} \frac{\boxed{x^2-3x+2}}{x-1} \ \frac{=0}{=0}$ ，$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ $= \lim_{x \to 1} (x-2) = -1$	去根式 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ $\lim_{x \to 1} \frac{\boxed{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ ，$=x-1$ $= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$	夾擠定理 $g(x) \leq \boxed{f(x)} \leq h(x)$ $\boxed{3x+2} \leq f(x) \leq \boxed{2x+3}$ $\lim_{x \to 1} (3x+2) = 5$　$\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$ $\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

③ 極限運算 (加減乘除可拆)

$\begin{cases} \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \\ \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = [\lim_{x \to a} f(x)] \times [\lim_{x \to a} g(x)] \end{cases}$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

3. 函數的連續

$\boxed{\lim_{x \to a} f(x)} = f(a)$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

⇒ 極限與連續的關係

極限存在 $\underset{\text{必定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}$ 連續

例　$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases}$　$x=1$ 連續

解

$\lim_{x \to 1^+} (x^2+1) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} (x+a)$

$2 = 2 = 1+a$

$\therefore a = 1$

good! 4/15

➢ 問題與解決

◎問題：

學習極限函數的過程中，我常對「趨近」的概念感到困惑。明明說是「趨近某個值」，卻還要分左邊趨近與右邊趨近，遇到絕對值的題目有時候算出來的極限是零，有時候卻又說極限不存在，讓人感到十分困惑。

◎解決：

為了克服極限函數帶來的困惑，我開始加強練習講義上的題目，藉由大量的練習來加深印象。同時，也會靜下心來認真思考每一題的步驟與概念。如果真的遇到不懂的地方，我會上 YouTube 尋找其他老師的教學影片來幫助理解，或是主動和同學討論，彼此分享想法與解題方式。這些方法讓我逐漸克服困難，也讓我對極限的概念越來越熟悉。

➢ 回饋與心得

透過這次對極限的學習，我對數學的理解產生了深刻的轉變。過去我總把數學當作解題與計算的工具，但極限讓我第一次真正體會到「趨近」與「抵達」之間的差異。

極限不只是得出一個數值，而是在觀察函數在某點附近的變化趨勢，這讓我感受到數學思維的抽象與細微。它讓我明白，即使一個值永遠無法真正抵達，我們依然可以透過趨近去掌握它的本質。這樣的學習經驗不僅讓我建立起微積分的基礎，更重新喚起我對數學的興趣與敬畏，也激勵我以更開放的心態去探索更深層的數理概念。這是一種從「算出答案」轉向「理解過程」的重要改變。

✧資料來源

1. ChatGPT(2025)。

2. 圖片來自 課本、習作、講義、napkin 、desmos。

3. 維基百科 極限（數學）- 維基百科，自由的百科全書。